b) Soit n = 0

$0 \leq 1 - U_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0$ vraie car on a : $U_0 = \frac{1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que :

$0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

On a : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{5}(1 - U_n) \leq \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Rightarrow 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$

c) On a : $0 \leq 1 - U_k \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k \Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \frac{4}{5} \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 4\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Et par suite : $1 - \frac{4}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} U_K}{n} \leq 1$